- المورفيزم والايزومورفيزم للترتيبات:

تعريف (1):

إذا كانت f دالة من المجموعة المرتبة جزئياً $(M, \leq)$ إلى م.م.ج $(M', \leq')$

$$f : (M, \leq) \longrightarrow (M', \leq')$$

نقول عن هذه الدالة

انها مورفيزم ترتيبي (دالة متزايدة) إذا كانت:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y) \; ; \forall x, y \in M$$

وبالإضافة لذلك إذا كانت f مورفيزم ترتيبي كانت f متباينة و f^{-1} مورفيزم ترتيبي فإننا نسمي f في هذه الحالة ايزومورفيزم ترتيبي

(2):

ونقول عن الدالة السابقة f انها مورفيزم عاكس للترتيب (دالة متناقصة) إذا تحقق الشرط:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq' f(y) \; ; \forall x, y \in M$$

وبالإضافة إلى كونه عاكس للترتيب كانت f متباينة و f^{-1} مورفيزم عاكس للترتيب فإنه يسمى ايزومورفيزم عاكس للترتيب.

- تمرين:

ليكن $f : (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$

معرفة بالشكل $f(x) = x^3 + 1 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

عند عدد أن f ايزومورفيزم ترتيبي.

- ملاحظة:

إذا كان f ايزومورفيزم ترتيبي للمجموعة المرتبة $(M, \leq)$ في المجموعة $(M', \leq')$ وكان للمجموعة الجزئية A من M حد أعلى أصغري هو العنصر a عندها فإن $f(a)$ (صورة هذا العنصر) هو حد أعلى أصغري للمجموعة $f(A)$

الإثبات:

ليكن y عنصر اختياري من $f(A)$ عندها يوجد عنصر $x \in A$ بحيث $y = f(x)$ وبما أن $x \in A$ ومن A له حد أعلى أصغري عندئذ $x \leq a$ وبما أن f مورفيزم ترتيبي فإن

$$y = f(x) \leq f(a)$$

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . مخبريات)

⇐ $f(a)$ هو عنصر أعلى للمجموعة $f(A)$

- ليكن d هو عنصر أعلى آخر للمجموعة $f(A)$ وبما أن f إيزومورفيزم ترتيبي إذاً يوجد $t \in M$ بحيث أن $f(t) = d$ وهذا يعني أن:

$f(x) \leq f(t)$ وبالتالي $x \leq t$ وذلك لكل $x \in A$

وهذا يعني أيضاً t هو عنصر أعلى للمجموعة A وحسب الفرض فإن $a \leq t$ وبما أن f إيزومورفيزم ترتيبي فإن:

$f(a) \leq f(t) = d$ وهذا يعني أن:

$f(a) = \sup f(A)$

- الفصل الثاني:

الشبكات نقول عن شبكة

- تعريف: هي كل مجموعة مرتبة جزئياً أي $(E, \leq)$ إذا كان لكل مجموعة جزئية منها مكونة من عنصرين يوجد عنصر أصغري وعنصر أدنى

وتكتب بالشكل $(E, \leq, \vee, \wedge)$

$\sup\{a,b\} = a \vee b$

$\inf\{a,b\} = a \wedge b$

وبالتالي تكون شبكة.

مثال 1:

$E = \{a, b, c\}$

$(P(E), \leq, \cup, \cap)$

هل هذه المجموعة بالنسبة لهذه العمليات تشكل شبكة.

E

$\{\{a\}, \{b\}\}$

$\{a\} \vee \{b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

تشكل شبكة

ϕ

مثال 2 - هام:

مجموعة الأعداد الطبيعية $(N, \leq)$ المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة

$a \leq b \iff a | b$

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . مخبريات)

هل يمكن أن تكون شبكة $(N, \leq, \vee, \wedge)$ ؟

$a \vee b = lcm(a,b)$ → المضاعف المشترك الأصغر

$a \wedge b = gcd(a,b)$ → القاسم المشترك الأكبر

مثال (3) $D(6)$, $D(20)$, $D(30)$

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $(D(6), \leq, \vee, \wedge)$

مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة القسمة

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

أو

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

مثال (4) إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما ولتكن E هي مجموعة جميع الزمر الجزئية من G تحت علاقة الاحتواء فإن المجموعة $(E, \subseteq)$ م.ج.ج كما أن تقاطع أي زمرتين جزئيتين هي زمرة جزئية.

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . مخبريات)

وبالتالي هذا التقاطع هو الحد الأدنى الأعظمي كما أن الحد الأعلى الأصغري لهذه المجموعة هو الزمرة الجزئية المولدة باجتماع زمرتين جزئيتين عندئذ نستطيع القول (Λ, V, Σ, E) شبكة الزمر الجزئية للزمرة G.

مثال:

بين أي من المخططات التالية تشكل شبكات وأي منها لا يشكل شبكات.

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . مخبريات)

(1) - يشكل شبكة.

(2) - تمثل شبكة.

(3) - لا تشكل شبكة لأن $b \vee c$ غير موجود.

(4) - لا تشكل شبكة لأن $y \wedge t = x$ و $y \wedge t = z$

(5) - تشكل شبكة.

(6) - تشكل شبكة.

(7) - لا تشكل شبكة لأن $e \vee h$ غير موجود، $d \wedge g$ غير موجود

(8) - لا تشكل شبكة لأن $c \wedge a$ غير موجود.

خواص الشبكات:

مبرهنة:

إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ما فإن عناصرها تحقق:

1) - خاصة اللاغو $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$

2) - الخاصة التبديلية $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$

3) - الخاصة التجميعية

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

(4) - في أية شبكة تتحقق خاصة الامتصاص

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

الاثبات:

1) - إن $x \wedge x \leq x$

وبما أن $x \leq x$ فإن $x \leq x \wedge x$ في هذه الحالة إن $x \wedge x$

هو لا حد أدنى ومنه $x = x \wedge x$

2) -

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$$

(3) -

$$\underbrace{x \wedge (y \wedge z)}_{a} = \underbrace{(x \wedge y)}_{b} \wedge z$$

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . مخبريات)

$a = x \wedge (y \wedge z) \Rightarrow a \leq x$ & $a \leq y \wedge z \Rightarrow a \leq x$ & $a \leq y$

& $a \leq z$

$a \leq x$ & $a \leq y \Rightarrow a \leq x \wedge y$ & $a \leq z \Rightarrow$

$a \leq (x \wedge y) \wedge z = b \Rightarrow a \leq b$ ....(1)

وبنفس الطريقة ينتج $b \leq a$ .... (2)

4) $x \wedge (x \vee y) = x$

لنبين من جهة أن

$x \wedge (x \vee y) \leq x$ .....(1)

وبما أن : $x \leq x$, $x \leq x \vee y$

بهذا يكون x هو حد أدنى للعنصرين $x, x \vee y$ ومنه

$x \leq x \wedge (x \vee y)$ ....(2)

ومن (1) و (2) تنتج المساواة .

ملاحظة : $(E, \leq, \vee, \wedge)$ و a, b عنصرين من الشبكة عندها

فإن :

1) $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$

2) $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$

اثبت ذلك .

انتهت المحاضرة